（一）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^{x+2}(x+3)^{x+3}}{(x+5)^{2x+5}}=$ ______________________.

(2) 曲线 y=$\dfrac{e^x}{3+x}$ 的凸区间是_______________.

(3) 设函数 f(x,y)= $\int_{x^2+y^2}^{\frac{y}{x}} e^{-t^2}$ dt, 则 x$\dfrac{\partial f}{\partial x}$+y$\dfrac{\partial f}{\partial y}$=______________.

(4) 在(0,+ ∞)上以知f(e^x)=1+x, f[φ(x)]=1+x+lnx,则φ(x)=______________.

(5) 以知向量组α$_1$=$(1,1,-1,3)^T$, α$_2$=$(1,0,1,0)^T$, α$_3$=$(3,1,a,3)^T$, α$_4$=$(2,a,0,a2+2)^T$的极大线性无关组是α$_1$, α$_2$, α$_3$, 则α =_______________.

(6) 以知矩阵 A=$\begin{bmatrix}4 & a & 0\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & a-1 & 1\end{bmatrix}$不可逆，那么矩阵 B=$\begin{bmatrix}2 & a & 0\\ -2 & 0 & -2\\ -3 & a-1 & -1\end{bmatrix}$的特征值中，有一个是___________.(填数字)

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设 $f(x)$ 在点 x=0 处可导，且 $f(\frac{1}{n})=\frac{2}{n}$, (n=1,2,3,………), 则 $f'(0)=$【 】

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(8) $f(x)=xe^{-x^2}\sin x^2$ 在区间(-∞，+∞)上是 【 】

(A) 有界的偶函数 (B) 有界的奇函数 (C) 无界的偶函数 (D) 无界的奇函数

(9) 设 $f(x)$ 是(-∞，+∞) 内的二次可导的奇函数，且在(0，+∞) 内有 $f'(x)$>0, $f''(x)$<0,在(-∞,0)内有 【 】

(A) $f'(x)$>0, $f''(x)$<0 (B) $f'(x)$>0, $f''(x)$>0

(C) $f'(x)$<0, $f''(x)$<0 (D) $f'(x)$<0, $f''(x)$>0

(10) 设 $f(x)$ 在 x=1 有连续的导数，又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}$=2,则【 】

(A) (1, $f(1)$)是 y=$f(x)$ 的拐点 (B) x=1 是 $f(x)$ 极小值点

(C) x=1 是 $f(x)$ 的极大值点 (D) x=1 不是 $f(x)$ 的极值点,(1, $f(1)$)也不是拐点

(11) 设 a>0,f(x)在[-a,a]连续，f(x)为偶函数，则在[-a,a]上【 】

(A) f(x)的全体原函数为奇函数 (B) f(x)的全体原函数为偶函数

(C) f(x)有唯一原函数为奇函数 (D) f(x)的任一原函数既不是奇函数也不是偶函数

(12) 曲线 y=1+x$\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}$ 的斜渐近线的方程是【 】

(A) y=x+$\frac{1}{2}$ (B) y= -x+$\frac{1}{2}$ (C) y= -x-$\frac{1}{2}$ (D) y=x-$\frac{1}{2}$

(13) 曲线 y=cosx(-$\frac{\pi}{2}$≤x≤$\frac{\pi}{2}$) 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的侧面积 S=【 】

(A) $2\sqrt{2}\pi+2\pi\ln(1+\sqrt{2})$ (B) $\sqrt{2}\pi+\pi\ln(1+\sqrt{2})$

(C) $4\pi\ln(1+\sqrt{2})$ (D) $2\pi\ln(1+\sqrt{2})$

(14) 设 A 是 m×n 矩阵，则下列 4 个命题

① 若 r(A)=m, 则非齐次线性方程组 Ax=b 必有解

② 若 r(A)=m，则齐次方程组 Ax=0 只有零解

③ 若 r(A)=n, 则非齐次线性方程组 Ax=b 有唯一解

④ 若 r(A)=n，则齐次方程组 Ax=0 只有零解

中正确的是【 】

(A) ①、③ (B) ①、④ (C) ②、③ (D) ②、④

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分９分）

设 $a_i>0$, i=1, 2, ………, n, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^{\,x}+a_2^{\,x}+\cdots+a_n^{\,x}}{n}\right)^{\frac{x}{n}}$

(16)（本题满分９分）

计算广义积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}$

(17)（本题满分９分）

设方程 $e^z=1+xz+x^2+y^2$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$, 求 dz 与 z_y''

(18)（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,其中积分区域D是由曲线y=$\sqrt{x-x^2}$ 与直线y=x 围成的平面区域.

(19)(本题满分12分)

就常数k的不同取值情况，确定方程lnx=kx的正根的个数.

(20)(本题满分12分)

设函数f(x)在去间[-a, a] (a>0) 上具有四阶连续导数，且存在极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$

(Ⅰ) 写出f(x)的带拉格朗日余项的马克劳林公式;

(Ⅱ) 证明：在[-a,a]内至少存在两点η_1和η_2，使得

$$\begin{cases} a^5 f^{(4)}(\eta_1)=60\int_{-a}^{a} f(x)dx \\ a^4 f^{(4)}(\eta_2)=120 f(\eta_2) \end{cases}$$

(21)(本题满分12分)

一飞机以匀速v沿y轴正向飞行，当飞机行至原点O时被发现，随即从x轴上点$(x_0,0)$处发射导弹向飞机击去，

其中$x_0>0$.若导弹的速度方向始终指向飞机，其速度大小为常数$2v$.

(Ⅰ) 求导弹运行轨迹满足的微分方程及初始条件;

(Ⅱ) 求导弹的运行轨迹方程及导弹自发射到击中飞机所需的时间T.

(22)(本题满分11分)

以知A=$\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&0&4\\0&-1&3\end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix}2&1&1\\4&0&5\\1&-1&2\end{bmatrix}$,矩阵X满足$XA^{-1}=BA^*+X$,其中$A^*$是A的伴随

矩阵，求矩阵X.

(23)(本题满分10分)

以知A=$\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&-2\\-1&-1&0\end{bmatrix}$,求$A^n$

（二）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} x, x\le 0 \\ x^2+x, x>0 \end{cases}$，则 $f[f(x)]=$______________.

(2) $\int \frac{x^2dx}{x^2-3x+2}=$________.

(3) 在 x=1 有极大值 6，在 x=3 有极小值 2 的次数最低的多项式是_______________.

(4) 交换累次积分的次序，可得 $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$ =________________.

(5) 以知 α_1，α_2，α_3是四元线形方程组AX=b的三个解，其中 $\alpha_1=(1,2,0,1)^T$, $\alpha_1-\alpha_2=$ $(-1,0,2,1)^T$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=(4,-1,2,3)^T$，若秩r(A)=2,那么AX=b的通解是_________.

(6) 以知A是 4 阶矩阵，α_1，α_2是矩阵A属于特征值 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量，若A的每一个特征向量均可由 α_1, α_2,线性表示,那么行列式|A+E|的值为_____________.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设 $f(x)=\sin e^{-|x|}\ln x$,则 $f(x)$ 是【　　】

(A) 周期函数　　(B) 有界函数　　(C) 单调函数　　(D) 偶函数

(8) 曲线 $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$,在 t=1 相应点处的切线方程是【　　】

(A) y= -3x+1　　(B) y= 3x+1　　(C) y= -3x -1　　(D) y=3x +1

(9) 积分 $\int_{-2}^{2}\max\{2,x^2\}dx$ 的值是【　　】

(A) 0　　(B) 16/3　　(C) 8　　(D) 8- $\frac{8}{3}$ $\sqrt{2}$

(10) 设 f(x) 在 x=0 的某一邻域内有连续的四阶导数，且当 x≠0 时，f(x)≠0 ，同时

F(x)=$\begin{cases} \frac{\tan x-\sin x}{f(x)}, x\ne 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$，在 x=0 处连续，则必有 【　　】

(A) $f(0)=1$ (B) $f'(0)=2$ (C) $f'''(0)=3$ (D) $f^{(4)}(0)=4$

(11) 当$x\to 0$时，$e^{x^2}-\cos x$ 是x^2的 【 】

(A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小 (C) 同阶但不等价的无穷小 (D) 等价无穷小

(12) 函数 $f(x)=e^{\frac{x}{1+x}}-x$ 在去间$[0,+\infty]$上【 】

(A) 单调减少，最大值为 1 (B) 单调增加 ，最大值为 e

(C) 单调减少，最小值为-e (D) 单调增加，最小值为 1

(13) 方程$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=2$在去间$(0, 2\pi)$内实根的个数为【 】

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

(14) 下列各组矩阵不相似的是【 】

(A) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1 & -5\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15) (本题满分 9 分)

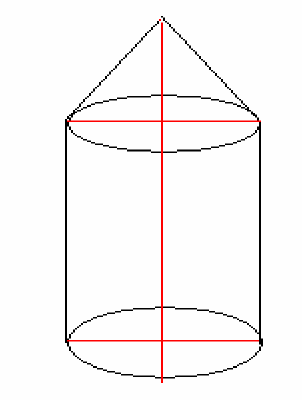
计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

(16) (本题满分 9 分)

求常数a, b, c, d的值，使得微分方程$y''+ay'+by=(cx+d)e^{2x}$有一个解是$y=e^{x}+x^2e^{2x}$.

(17) (本题满分 9 分)

如图所示，一个仓库其顶部为高与低圆半径都等于 R 的圆锥形，其底部为高是 H 与底圆半径等于 R 的圆柱形。设仓库的容积是常数 V, 求使仓库的表面积（包含底面积）最小时的 R 及 H.



(18)(本题满分 10 分)

设区域 D 由曲线 $y=-x^3$，直线 x=1 与 y=1 围成，计算二重积分

$$\iint_D x[y\cos(x^2+y^2)+1]d\sigma$$

(19)(本题满分 12 分)

设 x>0 时 F(x)= $\int_1^x f(\frac{t}{x})dt-\int_1^x f(\frac{1}{t})dt$，其中函数 f(x)在去间（0，+∞）上连续且单调增加. 试证明 $F(x)$在（0，+∞）也增加.

(20)(本题满分 12 分)

一容器在开始时盛有盐水 100 升，其中含净盐 10 公斤. 现以每分钟 3 升的速度注入清水，同时以每分钟 2 升的速度将冲淡的溶液放出. 溶液中装有搅拌器使容器中的溶液保持均匀，求过程开始后 1 小时溶液的含盐量.

(21)(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 满足方程x $f'(x)-3f(x)=-6x^2$，且由曲线y= $f(x)$，直线x=1 与x轴围成的平面图形D绕x轴旋转一周所得旋转体的体积最小，试求D的面积.

(22)(本题满分 11 分)

以知向量组 $\alpha_1=(1,0,2,4)^T$，$\alpha_2=(1,1,3,0)^T$，$\alpha_3=(2,1,a+2,4)^T$，$\alpha_4=(2,-1,3,a+7)^T$ 线性相关，

若 $\beta=(3,-1,a+6,a+11)^T$可由 α_1，α_2，α_3，α_4线性表示，求a的值，并写出 β 的线性表达式.

(23)(本题满分 10 分)

以知 A 是主对角元素全是 0 的 4 阶实对称矩阵，E 是 4 阶单位矩阵，如对角矩阵

$$B=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

使 E+AB 是对称的不可逆矩阵，求 A

（三）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 f(x) 在[0，+∞)连续，$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^a}=1, a>0, c>0$ 为常数，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-cx}\int_0^x e^{cs}f(s)ds}{f(x)}=\underline{\qquad\qquad}.$$

(2) 曲线 $x^2y+\ln y=1$ 在点(1, 1)处的法线方程是________.

(3) 曲线 $y=(3+x)e^{-\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程是________.

(4) 以知 $z=z(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=x, z(x,0)=e^x, \frac{\partial z(x,0)}{\partial y}=\sin x$, 则 $z(x,y)=$________.

(5) 行列式 $\begin{vmatrix}1&0&0&4\\-1&-3&0&3\\0&3&6&2\\0&0&-6&1\end{vmatrix}=$________.

(6) 以知向量组 $\alpha_1=(1，a,-1,2)^T, \alpha_2=(2,-1,a,5)^T, \alpha_3=(1,3a+1,-6,1)^T$ 线性相关，则 $\alpha=$__.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 下列命题中正确的是 【 】

(A) 若 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 连续，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，则 $\lim_{h\to0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$

(C) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续

(D) 设 $\lim_{h\to0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续

(8) 当 $x\to0$ 时，下面几个无穷小量中阶数最高的是 【 】

(A) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$　　(B) $\tan x-\sin x$

(A) $4x^2+5x^3-x^5$　　　　(D) $\int_0^{1-\cos x}\sin t dt$

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, x>0, \\ x^2, x\le 0, \end{cases}$ 则下列结论正确的是【　　】

(A) $f(x)$ 有间断点

(B) $f(x)$ 在(-∞,+∞)上连续，但在(-∞,+∞)上有不可导的点

(C) $f(x)$ 在(-∞,+∞)上处处可导，但 $f'(x)$ 在(-∞,+∞)上不连续

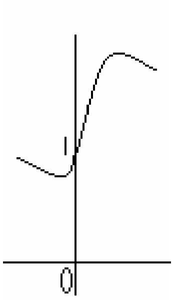
(D) $f(x)$ 在(-∞,+∞)上连续

(10) 设点(0,1)是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点，则系数 a,b,c 满足【　　】

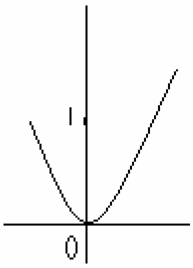
(A) $a=-1,b=2,c=1$　　　　(B) $a\ne 0,b=0,c=1$

(C) $a=1,b=1,c=0$　　　　(D) a可为任意实数$,b=0,c=1$

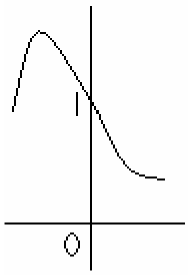
(11) 微分方程 $y''+y=2\cos x-4x\sin x$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解 $y=f(x)$在$x=0$点附近的图形是【　　】



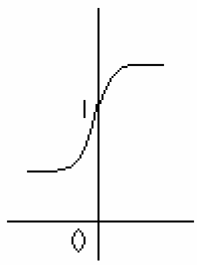
(A)



(B)



(C)



(D)

(12) $\int_{-1}^{1}(\frac{|x|^3}{\sqrt{1-x^2}}+x^2\sin x)dx=$【　　】

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{4}{3}$　　(C)1　　(D) $\frac{1}{2}$

(13) 设 b 为常数，积分 $\int_1^{+\infty}(\frac{x^2+bx+1}{x^2+x}-1)dx$ 收敛，则该积分值为【　　】

(A) $\frac{1}{2}\ln 2$ (B) $\frac{1}{2}\ln 3$ (C) $\ln 2$ (D) ln3

(14) 以知 A=$\begin{bmatrix} a+1 & 2 & a-1 & 2a \\ 2 & 2a-2 & 4a & 2a \\ a & 3-a & -a-1 & a \end{bmatrix}$,那么，秩 r(A)为【 】

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不能确定，与 a 有关

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分 12 分）

以知 $f(x)$ 在$[0,+\infty]$上有二阶连续导数， $f(x) = f(x) = 0$ 且 $f(x)>0$.若对 $\forall x>0$，则函数 $u(x)$ 表示曲线

$y = f(x)$在切点$(x, f(x))$处的切线在x轴上的截距.

(1)写出$u(x)$的表达式； (2) 求 $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to 0^+} u'(x)$

(16)（本题满分 12 分）

设函数$u = xy^2z^3$，又有方程

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 ---------------------(*)$$

(1) 当$z = z(x, y)$是由方程(*)所确定的隐函数时，求$\frac{\partial u}{\partial x}$

(2) 当$y = y(z, x)$是由方程(*)所确定的隐函数时，求$\frac{\partial u}{\partial x}|_{(1,1,1)}$

(17)（本题满分 10 分）

计算二重积分 I=$\iint\limits_D \sqrt{1-y^2}\,dxdy$,其中$D$为$x^2 + y^2 = 1(y \ge 0)$与$y = |x|$所围成的区域

(18)（本题满分 9 分）

求证：当$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$时，$\frac{\sin^3 x}{x^3} > \cos x$

(19)（本题满分 9 分）

以知某池塘最多只能工 10000 尾某种鱼生存，因此该种鱼的尾数在时刻 t 的变化率与$x(t)$和 10000-$x(t)$的乘积成正比，其中$x(t)$是时刻 t 该池塘中这种鱼的尾数. 若开始时（即 t=0）有这种鱼 200 尾，当时鱼的变化率是 9.8，求$x(t)$

(20)（本题满分 9 分）

设函数 $f(x),g(x)$满足$f^{'}(x)=g(x),g(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-f(t)]dt$,且$f(0)=1$.求

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(x)}{x+1}+g(x)\ln(x+1)\right]dx$$

(21)（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 [a,b] 连续，恒正且单调上升．$t\in[a,b],y=f(x)$与直线$y=f(b)$及$x=t$围成的图形面积 为

$S_1(t)$, $y=f(x)$与直线$y=f(a)$及$x=t$ 围成图形面积为$S_2(t)$.

(1) 证明：∃唯一的$t_0\in(a,b)$使得 $S_1(t_0)=S_2(t_0)$

(2) t 取何值时两部分面积之和即 $S_1(t)=S_2(t)$ 取最小值

(22)（本题满分 10 分）

设 $A^*B(A^*)^{-1}=6A+2BA$,其中A^*是A的伴随矩阵，若 A=$\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\3&0&2\end{bmatrix}$，求 B

(23)（本题满分 11 分）

以知 A 是3×4矩阵，秩 r(A)=1,若

$\alpha_1=(1,2,0,2)^T,\alpha_2=(-1,-1,1,a)^T,\alpha_3=(2,a,-3,-5)^T,\alpha_4=(1,-1,a,5)^T$ 与齐次方程组 Ax=0 的基础解系等价，求 Ax=0 的通解

（四）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $f(x)$在$x=x_0$可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-3\Delta x)}{\Delta x}=$____________.

(2) 不定积分$\int\dfrac{5-2x}{\sqrt{1+x^2}}dx=$____________.

(3) 设 $y=y(x)$是由方程$x=\tan(x-y)$确定的隐函数，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$____________.

(4) 函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极大值点是________________.

(5) 以知 $A^2=\begin{bmatrix}4&9&0\\3&7&0\\0&0&4\end{bmatrix}, A^3=\begin{bmatrix}13&30&0\\10&23&0\\0&0&-8\end{bmatrix}$,那么$A=$____________.

(6) 以知 A 是4×3非零矩阵，$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&7&9\end{bmatrix}$，且 AB=0,则齐次方程组 Ax=0 的通解是____.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=$ 【　　】

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) -1　　(D) 1

(8) 设函数 $f(x)$ 在去间 $(a-\delta,a+\delta)$ 内连续，其中常数 $\delta>0$，又 $f(a)=0$，则函数 $g(x)=|x-a|f(x)$ 在点 $x=a$ 处　　【　　】

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导　　(C) 可导但 $g'(a)\neq0$　　(D) $g'(a)=0$

(9) 以知 $x^2\ln x$ 是 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上的一个原函数，则$\int f(e^x)dx=$　　【　　】

(A) $(2x-1)e^x+C$　　(B) $(x-2)e^x+C$

(C) $(2x+1)e^x+C$　　(D) $(x+2)e^x+C$

(10) 设 $I=\int_1^2\frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x}}, J=\int_1^2\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{x}}, K=\int_1^2\frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x}}$，则三个数的大小关系是 【　　】

(A) $I<J<K$　(B) $J<K<I$　(C) $K<J<I$　(D) $I<K<J$

(11) 若 $\frac{x^2+ax+b}{(1+x)^2(1+x^2)}$ 的原函数 $F(x)$ 的表达式中不包含对数函数，则其中的常数 【　　】

(A) $a=1, b$为任意　(B) a任意$, b=2$　(C) a任意$, b=1$　(D) $a=0, b=2$

(12) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sin\frac{1}{t}dt$，则 【　　】

(A) $f(x)$ 在(-1,1)为无界函数　(B) $f(x)$ 在(-1,1)为连续有界函数

(C) $f(x)$ 在(-1,1)有间断点 x=0　(D) $f(x)$ 在[-1,1]不可积

(13) 设 $f(x)$ 在[a,b]有连续导数, $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 在(a,b)的唯一驻点，又 $f'(a)>0, f'(b)<0$,则$x=x_0$是 【　　】

(A) $f(x)$ 的极小值点

(B) $f(x)$ 在[a,b]的最小值点

(C) $f(x)$ 在[a,b]的最大值点

(D) $f(x)$ 的极大值点，但不是 $f(x)$ 在[a,b]的最大值点

(14)矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有一个特征向量是 【　　】

(A) $(2,1,-1)^T$　(B) $(1,-2,3)^T$　(C) $(2,-1,3)^T$　(D) $(4,2,-2)^T$

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分９分）

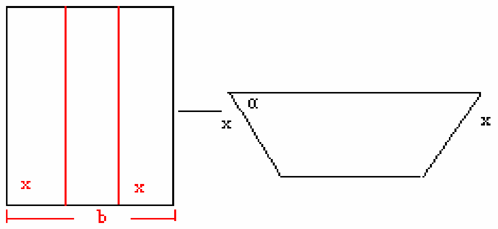
求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\Lambda\ (n+n)}}{n}$

(16)（本题满分９分）

计算曲线 $y=2\ln\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}-\sqrt{4-x^2}$ 上对应于$1\le x\le 2$ 的一段弧的长度

(17)(本题满分 9 分)

有一块铁板，宽度 b=240cm,把它的两边折起来作成一个横截面积为等腰梯形的无盖水槽，试问当每边的倾角α和折起来的宽度各为多少时，这个水槽的横截面积最大？见示意图



(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中积分区域 D 由$x^2+y^2=2y$的上半圆、直线 x=-1, x=1 以及 x 轴围成

(19)(本题满分 12 分)

求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+\tan t-\tan x)}}$

记此极限为$f(x)$，求函数$f(x)$的定义域与间断点，并指出间断点的类型

(20)(本题满分 12 分)

设抛物线$y=ax^2+bx+c$满足条件：

(1) $a<-1$,且通过点(0, 0)y 与(1, 2)；

(2)与抛物线$y=-x^2+2x$围成的图形面积最小

试求此抛物线方程

(21)(本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)$ = $f(1)$ =0.若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M>0$，求证：

$\exists x_0\in(0,1)使得f'(x_0)=M$

(22)(本题满分 13 分)

以知$\alpha=\begin{bmatrix}2\\1\\a-1\end{bmatrix}$是矩阵$A=\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&a+1\\0&4&a\end{bmatrix}$的特征向量.

(1)求 a 的值及特征向量α所对应的特征值；(2)判断 A 能否相似对角化，并说明理由.

(23)(本题满分 8 分)

设 A 为三阶方阵，α为三维列向量，以知向量组α，$A\alpha,A^2\alpha$线性无关，且$A\alpha^3=3A\alpha-2A^2\alpha$，证明：

矩阵$B=(\alpha,A\alpha,A^4\alpha)$可逆.

（五）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设曲线 $y=x^n$ 在点（1, 1）处的切线与 x 轴交于点 $(b_n,0)$ (n 为自然数)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b^n{}_n=$____.

(2) 设 $y=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{e^x\sqrt{\sin x}}}$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=$______________.

(3) 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解是________________.

(4) 设 F 具有一阶连续偏导数，又 $F(\dfrac{x}{z},yz)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $xz_x'-yz'_y=$________.

(5) 设三阶矩阵 A,B 满足 $2AB-A+2B=A^2$，若 $A=\begin{bmatrix}0&4&2\\0&0&0\\6&0&0\end{bmatrix}$, 则 $B=$__________.

(6) 以知 $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\2&a&7\\1&3&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&5\\0&2&3\\6&0&6\end{bmatrix}$，若秩 r(AB)=2,则 a=_________.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$ 的值是 【 】

(A) 0 (B) 1 (C) –1/2 (D) 1/2

(8) 设 $f(x)=\min\{\sin x,\cos x\}$，则 $f(x)$在区间$[0,2\pi]$上不可导的点共有 【 】

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

(9) 设 $y=y(x)$是由方程$e^{xy}+2\sqrt{x^2+y^2}=3+\ln y$ 确定的隐函数，且 $y(0)=1$, 则 $y'(0)=$ 【 】

(A) –2 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(10)设 $g(x)$ 在 a 点连续，则 $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$ 在点 a 必是 【 】

(A) 连续，但不可导 (B) 可导，但导数未必连续
(C) 可导，而且导数连续 (D) 存在二阶导数

(11) $\int_0^{98\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=$ 【 】

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $98\sqrt{2}$ (C) $196\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$

(12) 设 $F(x)=\int_0^x (2t-x)f(t)dt$，其中函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$ 在区间(-1,1)成立，则 【 】

(A) 函数 $F(x)$ 必在 x=0 处取得极大值

(B) 函数 $F(x)$ 必在 x=0 处取得极小值

(C) 函数 $F(x)$ 在 x=0 处没有极值，但点 $(o,F(0))$ 是曲线 $y=F(x)$ 的拐点

(D) 函数 $F(x)$ 必在 x=0 处没有极值，点 $(o,F(0))$ 也不是曲线 $y=F(x)$ 的拐点

(13)假设 $x>0$时，$f(x)=3x^2+Ax^{-3}\geq 20$,则常数A的最小取值是 【 】

(A) 64 (B) 32 (C) 20 (D) 17

(14)以知 3 阶矩阵 $A\sim B,\lambda=4$是可逆矩阵A的一个特征值，则$(\frac{1}{2}B^2)^{-1}+E$ 有一个特征值是 【 】

(A) 9 (B) $\frac{33}{32}$ (C) $\frac{9}{8}$ (D) 33

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分９分）

设 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$,求$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$

(16)（本题满分９分）

求证：$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}\leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}(\forall x>0)$

(17)（本题满分９分）

设 $f(x,y)=x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\arctan\frac{x}{y}$,求$df$与$f_{xy}''$

(18)（本题满分 10 分）

设区域 D 是直线 $x+y=2$ 及 x 轴及曲线 $y=x^2$ 围成，求二重积分 $\iint_D xe^y d\sigma$ 的值

(19)（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上非负连续的偶函数，且当 $x\geq 0$时，$f(x)$ 单调增加

(1) 对任意给定的常数 $a<b$，求常数 ξ 使得 $\int_a^b (x+\xi)f(x+\xi)dx=0$

(2) 证明在(1)中所得的 ξ 是唯一的

(20)（本题满分 12 分）

设 $f(x)$在$[0,+\infty$）上有连续的二阶导数，且$f(0)=0$，$f^{'}(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=1$，求 $f(x)$

(21)(本题满分 12 分)

对 t 的不同取值，讨论函数 $f(x)=\frac{1+2x}{2+x^2}$ 在去间$[t,+\infty)$上是否有最大值或最小值，若存在最大值或最小值，求出相应的最大值点和最大值，或相应的最小值点和最小值

(22)(本题满分 11 分)

以知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+2x_2+3x_3=4, \\ 2x_2+(a+4)x_3=2, \\ 2ax_1+2x_2+5x_3=6, \end{cases}$$

问 a 取何值是方程组无解，有唯一解，有无穷多解？并在有解时求其所有的解

(23)(本题满分 10 分)

以知 n 维向量α_1，α_2，α_3线性相关，证明：$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$线性相关.

（六）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{1-\cos\sqrt{x}}-1}{\ln(1+x)}=$______

(2)微分方程 $(2y-x)dy=ydx$ 的通解是______

(3)设 $f(x)$ 连续，且 $\dfrac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{2}f(t+1)dt=\sqrt{x}$对$x>0$成立，则$f'(x)=$______

(4)若方程组 $\begin{cases}2x-y+z+e^z=0\\ xy^2+\ln y=1\end{cases}$ 确定隐函数 $y=y(x)$与$z=z(x)$, 且$y(1)=1$，$z(1)=0$，则 $z'(1)=$______

(5)设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}$ 与 $B=(b_{ij})$ 可交换，若 b_{12}=3，则 B=______

(6)以知 $D=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\1&0&2&3\\1&5&2&1\\-1&1&5&2\end{bmatrix}$，则代数余子式 $A_{13}+A_{23}+A_{43}=$______

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 如下的四个函数中，在点 x=0 处可导的函数是 【 】

(A) $f(x)=e^{|x|}$ (B) $f(x)=\arctan|x|$

(C) $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{4}{3}}\sin\dfrac{1}{|x|},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$ (D) $f(x)=\arcsin\sqrt{|x|}$

(8) 曲线 $x^2+(y-2)^2=1$绕 x 轴旋转一周所得曲面包围的体积 V= 【 】

(A) $4\pi^2$ (B) $2\pi^2$ (C) 2π (D) 4π

(9) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$，则 $f^{(3)}(2)=$ 【 】

(A) $\dfrac{15}{16}$ (B) $-\dfrac{45}{8}$ (C) $-\dfrac{15}{16}$ (D) $\dfrac{45}{8}$

(10) 用参数方程$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$，给出的函数$y = y(x)$在$t = \dfrac{\pi}{2}$对应点处的二阶导数$\dfrac{d^2 y}{dx^2} =$ 【 】

(A) -1 (B) 1 (C) $-\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

(11) 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数$f_x^{'}(x_0,y_0)$与$f_y^{'}(x_0,y_0)$都存在是$f(x,y)$在该点可微的

(A) 充分但非必要的条件 (B) 必要但非充分的条件

(C) 充分且必要的条件 (D) 即不充分，又不必要的条件

(12) 设$f(x)$是以 4 为周期的函数，且$f^{'}(-1) = 2$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(3-4h) - f(3)} =$ 【 】

(A) 8 (B) -8 (C) $-\dfrac{1}{8}$ (D) $-\dfrac{1}{8}$

(13) 以知当$x \to 0$时，$f(x) = \sqrt{1+x^2} - \cos x, g(x) = \int_0^{\ln(1-x^2)} \sin t dt$与$h(x) = \arcsin x - x$都是无穷小量，按照它们关于 x 的阶数从低到高的顺序排列，应得到 【 】

(A) $f(x), g(x), h(x)$ (B) $h(x), f(x), g(x)$

(C) $f(x), h(x), g(x)$ (D) $h(x), g(x), f(x)$

(14) 以知 5 元齐次线性方程组经高斯消元化成阶梯形矩阵是 【 】

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 5 \\ & 1 & -1 & 0 & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

则自由变量不能取成

(A) x_1, x_2 (B) x_3, x_4 (C) x_1, x_3 (D) x_3, x_5

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分９分）

求$\lim\limits_{x\to+\infty} x[e(1+\dfrac{1}{x})^{-x} - 1]$

(16)（本题满分９分）

计算定积分$\int_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{3x^2-2}dx$

(17)（本题满分９分）

设$f(x,y) = xy(6-2x-y)$，区域 D 由 x 轴，y 轴与直线$2x + y = 8$围成. 求$f(x,y)$在 D 上的最大值与最小值。

(18)（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}d\sigma$，积分区域D由曲线$y=\sqrt{x-x^2},y=\sqrt{4-x^2}$及y轴围成

(19)(本题满分12分)

求证：当$x\in(0,\frac{\pi}{2})时,\frac{\sin^2 x}{x^2}>\cos x$

(20)(本题满分12分)

已知连续函数$f(x)满足f(x)=xe^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt,求f(x)$

(21)(本题满分12分)

设$f(x)$在[0,1]上连续，在(0,1)内二次可导，且$f(x)$在[0,1]上的最大值$M=2$,最小值m=0,求证：若$f(x)$的最大值点或最小值点至少有一个是区间(0,1)内的点，则在(0,1)内必存在$\zeta与\eta$，使得$|f'(\zeta)|>2,|f''(\eta)|>4成立$。

(22)(本题满分11)

已知$\zeta_1=(1,1,0,0)^T,\zeta_2=(1,0,1,0)^T,\zeta_3=(1,0,0,1)^T$是齐次线性方程组(1)的基础解系，

$\eta_1=(0,0,1,1)^T,\eta_2=(0,1,0,1)^T$是齐次线性方程组(2)的基础系，求方程组(1)与(2)的公共解

(23)(本题满分10)

设A,B都是3阶矩阵，将A的第1行的-2倍加至第3行，得到矩阵A_1，将B的第1列乘以-2得到B_1，如果$A_1B_1=\begin{bmatrix}0&3&1\\2&5&7\\4&8&6\end{bmatrix}$，求AB.

（七）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=b$，则 a=________, b=__________

(2) 假定函数 $y=y(x)$由$x^{\frac{1}{y}}=y^{\frac{1}{x}}$所确定，则$\dfrac{dy}{dx}=$___________

(3) 设直线 $y=ax+b$ 同时与曲线 $y=x^2$ 以及 $y=\dfrac{1}{x}$ 相切，则常数 a=________, b=_______

(4) 微分方程 $y''+2y'=12x^2-10$ 的通解是___________

(5) 设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&2&-2\\2&1&a\\3&0&4\end{bmatrix}$，三维列向量 $\alpha=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix}$。以知 $A\alpha$与α线性相关，则 a=__

(6) 以知A是n阶矩阵，满足$A^2+3A=0$, 那么 $(A+2E)^{-1}$=__________

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}=1$，则函数 $f(x)$ 在点 a 处必然 【　　】

A) 取极大值　　(B) 取极小值　　(C) 可导　　(D) 不可导

(8) 以知微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi(\dfrac{x}{y})$当$x>1$时有特解 $y=\dfrac{x}{\ln x}$,则$\varphi(x)=$ 【　　】

(A) $\dfrac{1}{\ln x}$　　(B) $\dfrac{x}{\ln^2 x}$　　(C) $\dfrac{1}{x}$　　(D) $-\dfrac{1}{x^2}$

(9) 设 $f(x)=\begin{cases}\cos 2x+2\sin x, x\le 0\\ ax^2+bx+c, x>0\end{cases}$，在 x=0 处二阶导数存在，则其中的常数 a, b, c 分别是 【　　】

(A) a=-2, b=2, c=1　　(B) a=2, b=-2, c=1

(C) a=-2, b=1, c=2　　(D) a=2, b=1, c=-2

(10) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+(2x-y)^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，在点(0,0)处 【　　】

(A)　连续，但两个偏导数不存在
(B)　两个偏导数都存在，但不连续
(C)　既不连续，两个偏导数也不存在
(D)　可微分

(11) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续奇函数，且满足 $|f(x)|\leq M$，其中常数 $M>0$，则函数 【　　】

$F(x)=\int_0^x te^{-t^2}f(t)dt$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的

(A) 有界奇函数　　(B) 有界偶函数　(C) 无界偶函数　　(D) 无界奇函数

(12) 下列命题中正确的是 【　　】

(A)　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为偶函数且在 $[0,+\infty)$ 可导，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导

(B)　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为奇函数且在 $[0,+\infty)$ 可导，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导

(C)　设 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx=0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=0$

(D)　设 $x_0\in(a,b)$, $f(x)$在$[a,b]$除x_0外连续，x_0是$f(x)$的一个间断点，则 $f(x)$在$[a,b]$仍存在原函数

(13) 以知 $\dfrac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 当 $x\geq 1$ 时的一个原函数，则 $\int_1^e x^2 f'(x)dx=$ 【　　】

(A) e　　(B) 2　　(C) －e　　(D) －2

(14) 以知 A 是 3 阶矩阵，λ_0是二重特征值，那么向量组 【　　】

① $(1,2,-1)^T,(2,4,-2)^T,(0,0,0)^T$

② $(1,-1,2)^T,(2,-2,4)^T,(-3,3,-6)^T$

③ $(1,1,1)^T,(1,0,1)^T,(0,-1,1)^T$

④ $(1,2,-1)^T,(1,-1,2)^T,(1,1,1)^T$

中肯定不属于 λ_0 的特征向量共有

(A) 1 组　　(B) 2 组　　(C) 3 组　　(D) 4 组

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分 9 分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导，且 $f(1)=3$,若$f(x)$的反函数$g(x)$满足

$$\int_2^{f(\ln x+1)} g(t)dt = x\ln x \qquad 求\ f(x)$$

(16)（本题满分 9 分）

求$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x(1+\sqrt{1+x^2})}$之值

(17)（本题满分 9 分）

设 $\mu = f(xy, x^2-y^2, x)$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数. 求 du与u_{xy}''

(18)（本题满分 10 分）

计算 $I=\int_{-\sqrt{2}}^{0} dx\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)dy+\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}(x^2+y^2)dy$

(19)（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在[a, b]上连续，在(a, b)内二阶可导，且

$$f(a)=f(b)=\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx,$$

试证：存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f''(\xi)=0$

(20)（本题满分 12 分）

位于上半平面的（向上）凹曲线 $y=y(x)$ 通过点(0,2)，在该点处切线水平，曲线上任一点(x,y)处的曲率与

$\sqrt{y}$及$1+y'^2$ 的乘积成反比，比例系数 $k=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，求曲线方程 $y=y(x)$

(21)（本题满分 12 分）

一质量为M，长为l的均匀杆 AB 吸引着一质量为 m 的质点 C，此质点 C 位于杆 AB 的中垂线上，且与 AB 的点距离为 a，试求：

(1) 杆 AB 与质点 C 的相互吸引力；

(2) 当质点 C 在杆 AB 的中垂线上从点 C 沿 y 轴移向无穷远处时，克服引力所做的功

(22)（本题满分 13 分）

设 $\alpha_1=(1,-1,0,0)^T,\alpha_2=(-1,2,1,1)^T,\alpha_3=(0,1,1,1)^T,\alpha_4=(1,-1,1,2)^T,\alpha_5=(0,2,1,0)^T$

(1) 若秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+k\alpha_5)$,求$k$

(2) 若β是任一个 4 维向量，β能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性表示？并说明理由。

(23)(本题满分 8 分)

以知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}$,

(1) 求A的特征值、特征向量； (2) 求A^{100}

（八）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1)设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $f''(0)=4$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\dfrac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=$____________

(2)设 $f(x)=e^{2-x^2}, f[\varphi(x)]=2-\cos x,$ 且 $\varphi(x)<0,$ 则 $\varphi'(x)=$______________

(3)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且 $f(0)=0,$ 又

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1,\\ \sqrt{x}, & x>1,\end{cases}$$ ，则 $f(x)=$____________________

(4)交换二次积分次序 $\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f(x,y)dx=$________________________

(5)以知 $A\sim B,$ 其中 $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$，那么 $r(A+B)=$__________

(6)以知 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(-1,6,-3,2)^T$ 与 $\alpha_3=(0,4,-2,1)^T$ 是方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+ax_4=4\\ -2x_1+x_2+bx_3-5x_4=1\\ x_1+x_4=1\\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4=c\end{cases}$$ 的解，那么此方程组的通解是______________________

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) $f(x)=\begin{cases}x^3\arctan\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 x=0 处最高阶的连续导数是 【　】

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

(8) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\int_0^x e^{-t^2}dt)=b,$ 则 【　】

(A) $a=-1,b=-\dfrac{1}{3}$　(B) $a=-1,b=\dfrac{2}{3}$

(C) $a=-2,b=-\frac{2}{3}$ (D) $a=-2,b=\frac{1}{3}$

(9)以知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 【 】

$$(1-x)f''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x},$$

若 $f'(0)=0$,则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点 (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(10)在下列曲线中，整条曲线的方程能表成 $y=f(x)$ 的是 【 】

(A) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

(B) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), -\infty<t<+\infty$

(C) $x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, y=3(e^t-e^{-t}), -\infty<t<+\infty$

(D) $x=\frac{(t+1)^2}{4}, y=\frac{(t-1)^2}{4}, -\infty<t<+\infty$

(11)方程 $15x^4-20x^3+6x^2-12x+12=0$ 在去间 $(-\infty,+\infty)$ 内 【 】

(A) 没有根 (B) 仅有一根 (C) 共有二个根 (D) 共有三个根

(12)积分 $I=\int_{-1}^{0}x^4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ 的值为 【 】

(A) $\frac{5}{16}\pi-\frac{6}{15}$ (B) $\frac{6}{16}\pi+\frac{6}{15}$ (C) $\frac{7}{16}\pi-\frac{9}{15}$ (D) $\frac{3}{16}\pi-\frac{8}{15}$

(13)若 A,B 为非零常数，c_1,c_2 为任意常数，则微分方程 $y''+k^2y=\cos x$ 的通解应具有形式 【 】

(A) $c_1\cos kx+c_2\sin kx+A\sin x+B\cos x$ (B) $c_1\cos kx+c_2\sin kx+Ax\sin x$

(C) $c_1\cos kx+c_2\sin kx+Ax\cos x$ (D) $c_1\cos kx+c_2\sin kx+Ax\sin x+Bx\cos x$

(14) n 阶矩阵 A 经初等行变换得到矩阵 B,那么下列命题中正确的是 【 】

(A) A 与 B 有相同的特征值 (B) $Ax=b$ 与 $Bx=b$ 是同解方程组

(C)A 与 B 的列向量是等价向量组 (D) A 与 B 有相同的特征向量

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分 9 分）

设 $x \geq 0$,且$f(x)=x, g(x)=\begin{cases}\cos x, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 求 $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$

(16)（本题满分 9 分）

设 $u=f(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z})$，其中 $f(s,t)$ 有连续的二阶偏导数，求 du 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$

(17)（本题满分 9 分）

计算 $I=\iint\limits_D y^2 dxdy$，其中 D 由直线 $x=-2, y=2, x$ 轴及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成

(18)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0)=f(1)=\int_0^1 xf(x)dx=0$。求证：至少存在二点 ξ_1 和 ξ_2 满足

$0<\xi_1<\xi_2<1$，使得 $f'(\xi_i)=2\xi_i f(\xi_i)(i=1,2)$ 成立

(19)（本题满分 12 分）

过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x \geq 0)$ 上点 A 作切线，使该切线与曲线及 x 轴围成平面图形 D 的面积 $s=\dfrac{3}{4}$.

（I）求点 A 的坐标　　（II）求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

(20)（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在去间 $(a,+\infty)$ 内可导(其中常数 a>0)，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2f(x)+f'(x)]=1$

求证：（I）$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}f(x)=+\infty$　　（II）$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

(21)（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 当 $x \geq 0$ 时连续可微，且 $f(0)=1$. 现以知由曲线 $y=f(x), x$ 轴、y 轴及过点 $(x,0)$ 且垂直与 x 轴的直线所围成的平面图形的面积与曲线 $y=f(x)$ 在[0, x]上的一段弧长值相等，求函数 $f(x)$

(22)（本题满分 11）

以知 $A=\begin{bmatrix}-4 & -10 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 3 & 6 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}$,若$A \sim B$.　求 a,b 的值，并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=B$.

(23)（本题满分 10）

以知方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

有唯一解，证明方程组

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

有唯一解，并当$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 0, b_n = 3$时求其解，其中$A_{ij}$是（Ⅰ）中系数行列式的代数余子式.

（九）

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 曲线 $\begin{cases} x = 2e^t + 1, \\ y = e^{-t} - 3 \end{cases}$ 上与 $t = 0$ 对应的点处的切线方程是________

(2) 设 $f(x) = \ln(3 + 7x - 6x^2)$, 则 $f^{(n)}(x) =$________

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} =$________

(4) 可以设二阶常系数线性微分方程 $y'' - 2y' + y = 5xe^x$ 的一个特解 $y^*(x) =$________

(5) 若A是n阶可逆矩阵，$|A| = a$, 且A中各行元素之和都是b, 则 $|A|$ 中代数余子式之和 $A_{11} + A_{21} + \Lambda + A_{n1}$

$=$________

(6) 以知 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值，那么 $a =$________

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设函数 $f(x)$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

(A) 当 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数时，$F(x)$ 必是以 T 为周期的周期函数 【　】

(B) 当 $f(x)$ 是单调函数时，$F(x)$ 比也是单调函数

(C) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

(D) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 比是偶函数

(8) 以知当 $x \to 0$ 时 $\int_0^{x - \sin x} \tan t dt$ 与 x^n 是同阶无穷小量，则 n 等于 【　】

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

(9) $\int_y^1 e^{t^2} dt + \int_0^{\sin x} \cos t^2 dt = 0$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ 【　】

(A) $-e^{-y^2} \cos x \cos(\sin^2 x)$　　(B) $e^{-y^2} \cos x \cos(\sin^2 x)$

(C) $-e^{-y^2}\cos(\sin^2 x)$　　(D) $e^{-y^2}\cos(\sin^2 x)$

(10) 设 $f(x)$ 在 x_0 可导切 $f'(x_0)>0$, 则 $\exists\delta>0$, 使得　【　】

(A) $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 单调上升　　(B) $f(x)>f(x_0), x\in(x_0-\delta, x_0+\delta), x\neq x_0$

(C) $f(x)>f(x_0), x\in(x_0, x_0+\delta)$　　(D) $f(x)<f(x_0), x\in(x_0, x_0+\delta)$

(11) 下列说法中正确的是　【　】

(A) 因为 $f(x)=\sin x^2-1$ 在[0, 1]不总是 $f(x)\geq 0$，故 $\int_0^1(\sin x^2-1)dx\geq 0$ 不正确

(B) 设 $\alpha>0, \beta>0$, 下列各数列趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快的排列顺序是 $\ln^\beta n, n^\alpha, a^n (a>1)$

因此我们可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^a}{\ln^\beta n}=\infty, \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^a}{a^n}=0$

(C) 设 $x_n\neq 0, \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 存在，$\{y_n\}$ 有界但不收敛，则 $\{x_n y_n\}$ 收敛的充要条件是 $a=0$

(C) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，$\varphi(x)$ 在 $x=f(a)$ 间断，则 $\varphi(f(x))$ 在 $x=a$ 间断

(12) 积分 $I=\int_0^\pi x\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}dx$ 的值等于　【　】

(A) 2π　　(B) π　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{\pi}{4}$

(13) 设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数且 $f(x,y)(ydx+xdy)$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，则下列等式成立的是

(A) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$　　(B) $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$　　(C) $-x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$　　(D) $y\frac{\partial f}{\partial x}=x\frac{\partial f}{\partial y}$

(14) 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，则齐次方程组 $AA^T x=0$，自由变量的个数为　【　】

(A) r　　(B) $n-r$　　(C) $m-r$　　(D) $n-m$

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15) (本题满分９分)

试求微分方程 $(1+y^2)dx+(x-\arctan y)dy$ 的通解

(16) (本题满分９分)

设在开区域 D 内 $u(x,y), v(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, u^2+v^2=c\text{ (常数)}$$

求证：$u(x,y),v(x,y)$在D内为常数

(17)（本题满分９分）

设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，证明不等式$\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy<\frac{2}{5}\pi$

(18)（本题满分１２）

以知曲线在直角坐标系中由参数方程给出：

$$x=t\ln t,\qquad y=\frac{\ln t}{t}(t\ge 1)$$

求：（Ⅰ）曲线的单调去间及极值点；（Ⅱ）曲线的凹凸去间及拐点；(III)函数图形的渐近线.

(19)（本题满分１０）

用铁锤将一铁钉击入木版，设木版对铁钉的阻力与铁钉被击入木版的深度成正比.在铁锤击第一次时，能将铁钉击入木版 1 cm，如果铁锤每次打击所做的功相等，问铁锤第二次能把铁钉再击入多少？

(20)（本题满分 12 分）

设$f(x)$在$[-b,b]$二阶连续可导，$b>0$.

(Ⅰ)求证：　$\exists$常数M_1,M_2,对$\forall x\in[-b,b]$有

$$f(0)+f'(0)x+M_1x^2\le f(x)\le f(0)+f'(0)x+M_2x^2;$$

(Ⅱ)设$f(0)=0$,令$x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{1}{n^2})+\Lambda+f(\frac{n}{n^2})$,求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

(21)（本题满分 12 分）

设$f(x)$在[0, 1]上连续，在(0, 1)内二阶可导，$f(x)$的最小值为 0，最大值为 1，且其中至少有一个在开去间(0, 1)内某点取得.求证：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$|f''(\xi)|>2$

(22)（本题满分 10 分）

以知方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_3=1 \\ 2x_1+ax_2+5x_3=0 \\ 4x_1+cx_3=b \end{cases}$$

的通解为$k\xi+\eta$，其中η是方程组的一个特解，ξ是到出组的基础解系，k为任意常数，求a,b,c的取值并求此通解

(23)（本题满分 11 分）

设 A 是 n 阶反对称实矩阵.

（Ⅰ）证明 A 的特征值是 0 或纯虚数；

（Ⅱ）证明$(E-A)(E+A)^{-1}$是正交矩阵